

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023-24

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 03 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: 2Γ

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: 90 λεπτά

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ – Α' ΣΕΙΡΑ

ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από 6 ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

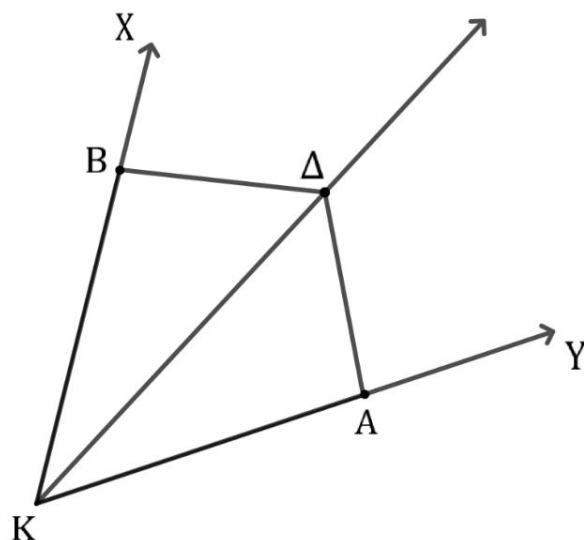
A1. Να αντιστοιχίσετε κάθε μία παράσταση της στήλης Α, με την αντίστοιχη ορθή απάντηση της στήλης Β. Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τις απαντήσεις σας στον Πίνακα 1 που ακολουθεί.

Στήλη Α	Στήλη Β
(α) $x^2 - 1$	(i) $(x - 1)^2$
(β) $x^2 - x$	(ii) Δεν παραγοντοποιείται
(γ) $x^2 - 4x + 3$	(iii) $(x + 3)(x - 1)$
(δ) $x^2 + 1$	(iv) $x(x - 1)$
(ε) $x^2 - 2x + 1$	(v) $(x - 3)(x - 1)$
	(vi) $(x - 1)(x + 1)$
	(vii) $(x - 3)(x + 1)$

Λύση:

ΠΙΝΑΚΑΣ 1				
(α)	(β)	(γ)	(δ)	(ε)
(vi)	(iv)	(v)	(ii)	(i)

A2. Στο πιο κάτω σχήμα, η $K\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{XKY}$ και A, B σημεία των ημιευθειών KY και KX αντίστοιχα, έτσι ώστε $KA = KB$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $BK\Delta$ και ΔKA είναι ίσα.



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $BK\Delta$ και ΔKA τα οποία έχουν:

(1) $K\Delta = K\Delta$ (Κοινή πλευρά)	(Π)	} $\Rightarrow \overset{\Delta}{BK\Delta} = \overset{\Delta}{AK\Delta}$ (Π - Γ - Π)
(2) $\widehat{BK\Delta} = \widehat{\Delta KA}$ ($K\Delta$ διχοτόμος)	(Γ)	
(3) $KB = KA$ (Δεδομένο)	(Π)	

Άρα, τα τρίγωνα $BK\Delta$ και ΔKA είναι ίσα διότι έχουν δυο πλευρές αντίστοιχα ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές αντίστοιχα ίσες.

A3. (α) Να χαρακτηρίσετε με ΟΡΘΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο την ορθή απάντηση.

Λύση:

(i) Το ζεύγος $(x, y) = (-2, 10)$ είναι η λύση του συστήματος: $x + y = -8$ $2x - y = 2$	ΟΡΘΟ / <u>ΛΑΘΟΣ</u>
(ii) Οι ευθείες $\varepsilon_1: 5x + y = 3$ και $\varepsilon_2: 10x + 2y = 6$ ταυτίζονται.	<u>ΟΡΘΟ</u> / ΛΑΘΟΣ
(iii) Αν οι κλίσεις δύο ευθειών είναι ίσες, τότε οι ευθείες τέμνονται.	ΟΡΘΟ / <u>ΛΑΘΟΣ</u>
(iv) Οι ευθείες $\varepsilon_3: y = x + 4$ και $\varepsilon_4: y = -x - 2$ είναι κάθετες μεταξύ τους.	<u>ΟΡΘΟ</u> / ΛΑΘΟΣ
(v) Η ευθεία $\varepsilon_5: y = (\alpha + 2)x + 4$ είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_6: y = 5x - 2$, αν $\alpha = 3$.	<u>ΟΡΘΟ</u> / ΛΑΘΟΣ

(5 μονάδες)

(β) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{matrix} x + y = -8 \\ 2x - y = 2 \end{matrix}$

(5 μονάδες)

Λύση:

A' τρόπος:	B' τρόπος:
$\begin{array}{r} x + y = -8 \\ 2x - y = 2 \\ \hline 3x = -6 \\ \Rightarrow x = \frac{-6}{3} \\ \Rightarrow x = -2 \end{array}$ $x + y = -8 \xrightarrow{x=-2} -2 + y = -8$ $\Rightarrow y = -8 + 2 \Rightarrow y = -6$	$\begin{array}{ll} x + y = -8 & (1) \\ 2x - y = 2 & (2) \end{array}$ αντικαθιστώ την $x = -8 - y$ στην (2) $2(-8 - y) - y = 2 \Rightarrow -16 - 2y - y = 2$ $\Rightarrow -2y - y = 2 + 16$ $\Rightarrow -3y = 18 \Rightarrow y = -6$ $x + y = -8 \xrightarrow{y=-6} x - 6 = -8$ $\Rightarrow x = -8 + 6 \Rightarrow x = -2$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (-2, -6)$

A4. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = (5x - y)^2 - (5x + 2)(5x - 2) - 29$ και $B = 6xy - 20x$.

(α) Να δείξετε ότι: $A = y^2 - 10xy - 25$. (5 μονάδες)

(β) Να βρείτε την παράσταση: $A + B$ (2 μονάδες)

(γ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A + B$ (3 μονάδες)

Λύση:

$$(α) A = (5x - y)^2 - (5x + 2)(5x - 2) - 29$$

$$= [(5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot y + y^2] - [(5x)^2 - 2^2] - 29$$

$$= (25x^2 - 10xy + y^2) - (25x^2 - 4) - 29$$

$$= 25x^2 - 10xy + y^2 - 25x^2 + 4 - 29$$

$$= y^2 - 10xy - 25$$

$$(β) A + B = y^2 - 10xy - 25 + 6xy - 20x$$

$$= y^2 - 4xy - 20x - 25$$

$$(γ) A + B = y^2 - 4xy - 20x - 25$$

$$= (y^2 - 25) + (-4xy - 20x)$$

$$= (y - 5)(y + 5) - 4x(y + 5)$$

$$= (y + 5)(y - 5 - 4x)$$

A5. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{15}{x^2+3x-4} - \frac{2x+1}{1-x} = \frac{x+1}{x+4}$

Λύση:

$$\frac{15}{x^2+3x-4} - \frac{2x+1}{1-x} = \frac{x+1}{x+4} \Leftrightarrow \frac{\overbrace{1}^1}{(x+4)(x-1)} + \frac{\overbrace{2x+1}^{x+4}}{x-1} = \frac{\overbrace{x+1}^{x-1}}{x+4}$$

Ε. Κ. Π = $(x+4)(x-1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow 15 + (2x+1)(x+4) = (x+1)(x-1) \quad \Rightarrow x \neq -4 \text{ και } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 15 + 2x^2 + 8x + x + 4 = x^2 - 1^2$$

$$\Leftrightarrow 15 + 2x^2 + 8x + x + 4 - x^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ Δεκτή ή } x = -4 \text{ Απορρίπτεται}$$

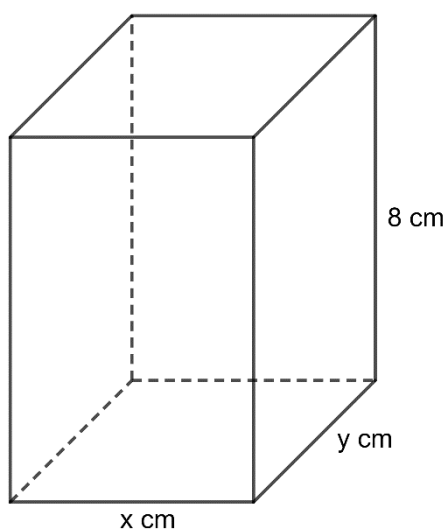
A6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις βάσης $x \text{ cm}$, $y \text{ cm}$ και ύψος $v = 8 \text{ cm}$.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της βάσης του, αν ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι $V = 120 \text{ cm}^3$. (5 μονάδες)

(β) Να δείξετε ότι $x + y = 8$, αν η περίμετρος της βάσης του είναι 16 cm .

(2 μονάδες)

(γ) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^2 + y^2$, με τη χρήση ταυτότητας. (3 μονάδες)



Λύση:

(α) **A' τρόπος**

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 120$$

$$\Rightarrow x \cdot y \cdot 8 = 120$$

$$\Rightarrow x \cdot y = \frac{120}{8}$$

$$\Rightarrow x \cdot y = 15$$

$$E_{\beta} = x \cdot y = 15 \text{ cm}^2$$

(β) $\Pi_{\beta} = 16$

$$2x + 2y = 16$$

$$\Rightarrow 2(x + y) = 16$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{16}{2}$$

$$\Rightarrow x + y = 8$$

B' τρόπος

$$V = E_{\beta} \cdot v$$

$$\Rightarrow E_{\beta} \cdot 8 = 120$$

$$\Rightarrow E_{\beta} = \frac{120}{8}$$

$$\Rightarrow E_{\beta} = 15 \text{ cm}^2$$

(γ) Αφού ισχύει $x + y = 8$ τότε $(x + y)^2 = 8^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot 15 + y^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 30 + y^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 64 - 30$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 34$$

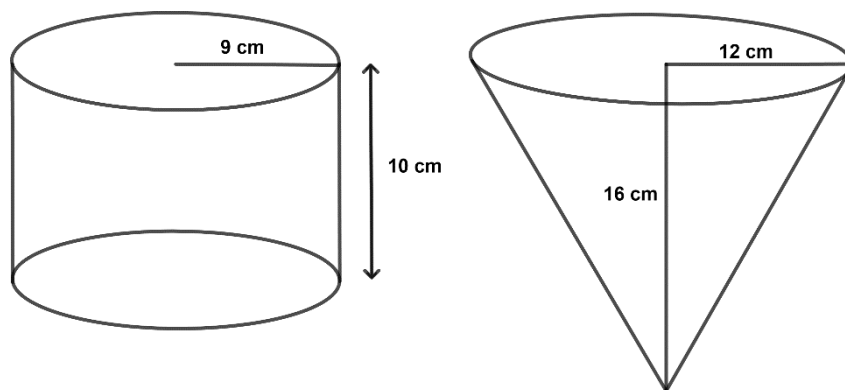
ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 3 ασκήσεις και βαθμολογείται με 40 μονάδες.

Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Δυο ασκήσεις βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία και μία άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Σε μια παγωταρία πωλούνται δύο διαφορετικές συσκευασίες παγωτού. Η μία είναι σε σχήμα κυλίνδρου, με ακτίνα βάσης 9 cm και ύψος 10 cm και η άλλη είναι σε σχήμα κώνου, με ακτίνα βάσης 12 cm και ύψος 16 cm, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

Αν καλυφθεί πλήρως η κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου και του κώνου με χάρτινη ετικέτα, αμελητέου πάχους, να εξετάσετε σε ποια συσκευασία θα χρησιμοποιηθεί το λιγότερο χαρτί. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (10 μονάδες)



Λύση:

$$\begin{aligned}E_{\text{κ.κυλίνδρου}} &= 2\pi Rv \\&= 2\pi \cdot 9 \cdot 10 \\&= 180\pi \\&\cong 180 \cdot 3,14 \\&= 565,2 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= 16^2 + 12^2 \\&\Rightarrow \lambda^2 = 256 + 144 \\&\Rightarrow \lambda^2 = 400 \\&\Rightarrow \lambda = \sqrt{400}, \lambda > 0 \\&\Rightarrow \lambda = 20 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_{\text{κ.κώνου}} &= \pi R\lambda \\&= \pi \cdot 12 \cdot 20 \\&= 240\pi \\&\cong 240 \cdot 3,14 \\&= 753,6 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Το λιγότερο χαρτί θα χρησιμοποιηθεί στη συσκευασία με σχήμα κυλίνδρου γιατί έχει το μικρότερο εμβαδόν κυρτής επιφάνειας ($E_{\text{κ.κυλίνδρου}} < E_{\text{κ.κώνου}}$).

B2. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = \frac{\frac{x^2-20}{x} - 8}{1 - \frac{10}{x}} \quad \text{και} \quad \Lambda = \left(\frac{1}{x} + \frac{10}{x^2-10x} \right) \div \frac{1}{x^2-9x-10}, \quad x \neq 0, x \neq -1 \text{ και } x \neq 10$$

(α) Να δείξετε ότι: $K = x + 2$ και $\Lambda = x + 1$ (10 μονάδες)

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $xK - 2\Lambda = 7$. (5 μονάδες)

Λύση:

(α) **A' τρόπος:**

$$K = \frac{\frac{x^2-20}{x} - 8}{1 - \frac{10}{x}} = \frac{\frac{x^2-20-8x}{x}}{\frac{x-10}{x}} = \frac{(x-10)(x+2)}{x} = \frac{\cancel{x}(x-10)(x+2)}{\cancel{x}(x-10)} = x+2$$

B' τρόπος:

$$K = \frac{\frac{x^2-20}{x} - 8}{1 - \frac{10}{x}} = \left(\frac{x^2-20}{x} - 8 \right) \div \left(1 - \frac{10}{x} \right) = \left(\frac{x^2-20-8x}{x} \right) \div \left(\frac{x-10}{x} \right) =$$

$$\frac{(x-10)(x+2)}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{x-10} = x+2$$

$$\Lambda = \left(\frac{1}{x} + \frac{10}{x^2-10x} \right) \div \frac{1}{x^2-9x-10} = \left[\frac{1}{x} + \frac{10}{x(x-10)} \right] \div \frac{1}{(x-10)(x+1)}$$

$$= \frac{\frac{x-10+10}{x(x-10)} \cdot \frac{(x-10)(x+1)}{1}}{1} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-10)} \cdot \frac{(x-10)(x+1)}{1} = x+1$$

$$(\beta) \quad xK - 2\Lambda = 7 \Leftrightarrow x \cdot (x+2) - 2(x+1) = 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2x - 2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{Δεκτή} \quad \text{ή} \quad x = -3 \quad \text{Δεκτή}$$

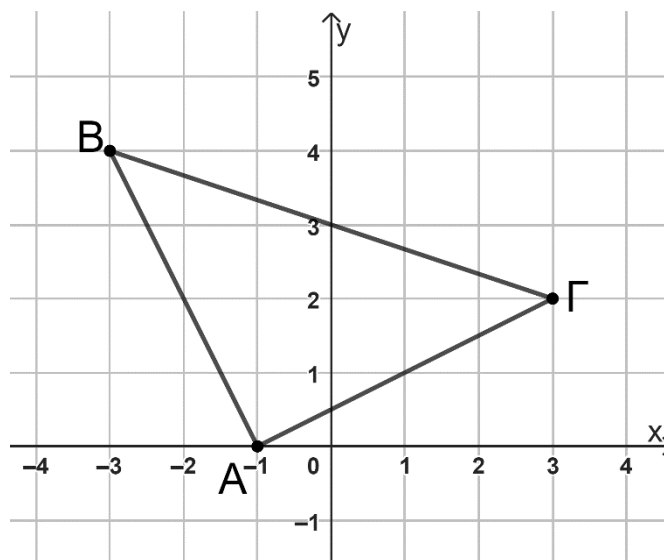
B3. (α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = AΓ) όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο. (4 μονάδες)

(ii) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΒΓ. (3 μονάδες)

(iii) Αν $M(0,3)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που περνά από το σημείο Μ και είναι παράλληλη με την πλευρά ΑΓ. (3 μονάδες)

(iv) Να αποδείξετε ότι $BΓ = 2\sqrt{10}$ μονάδες. (2 μονάδες)



(β) Να εξετάσετε αν το πιο πάνω τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι ίσο με ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΔΕΖ, με $\hat{E} = 90^\circ$ και $\Delta Z = BΓ = 2\sqrt{10}$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (3 μονάδες)

Λύση:

(α) (i) $A(-1,0)$ $B(-3,4)$ $\Gamma(3,2)$

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 0}{-3 - (-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \frac{2 - 0}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow AB \perp A\Gamma \text{ ή } (\hat{A} = 90^\circ).$$

Άρα, το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

$$(ii) x_M = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0$$

$$y_M = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$(iii) \left. \begin{array}{l} \text{Έστω } \varepsilon: y = ax + \beta \text{ η ευθεία που είναι παράλληλη με την } A\Gamma \\ M(0,3) \Leftrightarrow \beta = 3 \text{ (το } \beta \text{ μπορεί να βρεθεί και με αντικατάσταση)} \end{array} \right\}$$

$$A\Gamma \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon: y = ax + \beta \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$(iv) B(-3,4) \quad \Gamma(3,2)$$

$$\begin{aligned} (B\Gamma) &= \sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 + 3)^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \text{ μονάδες} \end{aligned}$$

(β) **Α' τρόπος:**

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABΓ και ΕΔΖ τα όποια έχουν:

$$\left. \begin{array}{ll} (i) & \hat{A} = \hat{E} = 90^\circ \text{ (τα τρίγωνα } AB\Gamma \text{ και } \Delta EZ \text{ είναι ορθογώνια)} \quad (O) \\ (ii) & \Delta Z = B\Gamma = 2\sqrt{10} \text{ μονάδες (δεδομένο)} \quad (Π) \\ (iii) & \hat{B} = \hat{\Delta} = 45^\circ \text{ ή } \hat{\Gamma} = \hat{Z} = 45^\circ \quad (Γ) \\ & \text{(άθροισμα γωνιών τριγώνου, } AB\Gamma \text{ και } \Delta EZ \text{ ισοσκελή τρίγωνα)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}B\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{Z} \quad (Π - Γ - O)$$

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και ΕΔΖ είναι ίσα γιατί η υποτείνουσα και η μία οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα ίσες με την υποτείνουσα και την αντίστοιχη οξεία γωνία του άλλου τριγώνου.

Β' τρόπος:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABΓ και EZΔ τα όποια έχουν:

(i)	$\hat{B} = \hat{Z} = 45^\circ$ (άθροισμα γωνιών ισοσκελών τριγώνων)	(Γ)	{	$\Rightarrow \hat{AB\Gamma} = \hat{EZ\Delta}$ (Γ - Π - Γ)
(ii)	$\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 45^\circ$ (άθροισμα γωνιών ισοσκελών τριγώνων)	(Γ)		
(iii)	$\Delta Z = B\Gamma = 2\sqrt{10}$ μονάδες (δεδομένο)	(Π)		

Άρα, τα τρίγωνα ABΓ και EZΔ είναι ίσα γιατί έχουν μια ίση πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες σε κάθε τρίγωνο αντίστοιχα ίσες.