

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΧΡΟΝΙΑΣ 2024-2025

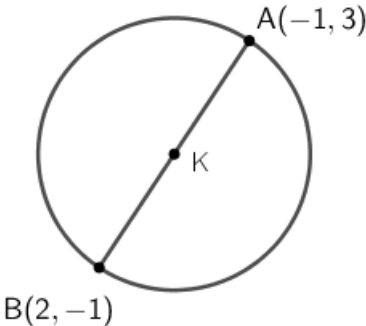
ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ – Β' ΣΕΙΡΑ

- Μικρότερη κλασματική μονάδα βαθμολόγησης είναι το 0,5.
- Στον πίνακα των βαθμολογιών να περάσετε βαθμούς από την ερώτηση 1 μέχρι και την ερώτηση 9.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.

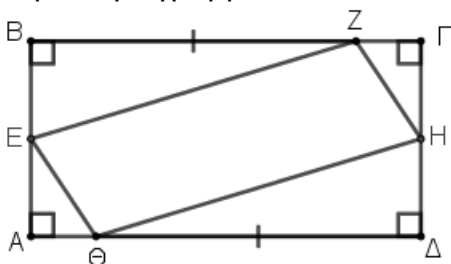
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

A1	Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: (α) $\alpha\beta^2 + 3\beta =$ (β) $x^2 - 36 =$ Λύση (α) $\alpha\beta^2 + 3\beta = \beta(\alpha\beta + 3)$ (β) $x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$	(α) 2μον.(Κοινός παράγοντας) 3μον.(ορθοί όροι στην παρένθεση) (β) 5μον.(2,5μον. ο κάθε παράγοντας - παρένθεση)
A2	Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $(x + 7)(x - 5) = 0$ (β) $y^2 + 2y - 15 = 0$ Λύση (α) $(x + 7)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = -7 \text{ ή } x = 5$ (β) $y^2 + 2y - 15 = 0 \Rightarrow (y + 5)(y - 3) = 0$ $\Rightarrow y = -5 \text{ ή } y = 3$	(α) 5μον.(2,5μον. για κάθε ορθή λύση) (β) 3μον.(Παραγοντοποίηση τριωνύμου) 2μον.(1μον. για κάθε ορθή λύση)

A3	Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και διάμετρο ΑΒ. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ και την ακτίνα του κύκλου.  Λύση $K\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = K\left(\frac{-1 + 2}{2}, \frac{3 - 1}{2}\right) = K\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ $(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ $= \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - (-1))^2}$ $= \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$ $R = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$	2μον.(Ορθή αναγραφή του τύπου για το μέσο δύο σημείων) 2μον. (Ορθή αντικατάσταση) 1μον. (Αποτέλεσμα) 1μον.(Ορθή αναγραφή του τύπου απόστασης δύο σημείων) 2μον. (Ορθή αντικατάσταση) 1μον. (Ορθός υπολογισμός του μήκους της διαμέτρου) 1μον.(Αποτέλεσμα) Σημείωση: Να μην αφαιρεθούν μονάδες αν γίνει ορθή αντικατάσταση χωρίς να γραφούν οι τύποι
A4	Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα: $(x - 4y)^2 - (y - 2x)(y + 2x) + 8xy = 5(x^2 + 3y^2)$ Λύση $A'_{\text{μέλος}} = (x - 4y)^2 - (y - 2x)(y + 2x) + 8xy$ $= x^2 - 2 \cdot x \cdot 4y + 16y^2 - (y^2 - 4x^2) + 8xy$ $= x^2 - 8xy + 16y^2 - y^2 + 4x^2 + 8xy$ $= 5x^2 + 15y^2$ $= 5(x^2 + 3y^2) = B'_{\text{μέλος}}$	3μον.(Εφαρμογή ταυτότητας τέλειου τετραγώνου 1μον. για κάθε όρο) 3μον.(Εφαρμογή ταυτότητας διαφοράς δύο τετραγώνων 1,5μον. για κάθε όρο) 1μον.(Ορθή αλλαγή προσήμων της παρένθεσης) 1,5μον.(Αναγωγή ομοίων όρων) 1,5μον.(Ορθή παραγοντοποίηση)

A5

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Τα σημεία Ε και Η είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΑΔ παίρνουμε σημεία Ζ και Θ αντίστοιχα τέτοια ώστε $BZ = \Theta\Delta$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle BZE = \triangle H\Theta$

- (1) $BZ = \Theta\Delta$ (Δεδομένο)
- (2) $\angle ZBE = \angle H\Delta\Theta = 90^\circ$
- (3) $BE = H\Delta$ (Ε, Η μισά ίσων πλευρών)

$1,2,3 \Rightarrow \triangle BZE = \triangle H\Theta$ (Π-Π-Ο)

$ZE = H\Theta$ (αντίστοιχα στοιχεία τριγώνου ίσα)

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle EA\Theta = \triangle Z\Gamma H$

- (1) $Z\Gamma = A\Theta$ ($BZ = \Theta\Delta$ και $B\Gamma = A\Delta$)
- (2) $\angle Z\Gamma H = \angle EA\Theta = 90^\circ$
- (3) $EA = \Gamma H$ (Ε, Η μέσα ίσων πλευρών)

$1,2,3 \Rightarrow \triangle EA\Theta = \triangle Z\Gamma H$ (Π-Π-Ο)

$E\Theta = ZH$ (αντίστοιχα στοιχεία τριγώνου ίσα)

Το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο διότι έχει τις απέναντι του πλευρές ίσες.

0,5μον. (Εύρεση των τριγώνων που συγκρίνονται)

1,5μον. (Εύρεση των αντίστοιχων κύριων στοιχείων των τριγώνων που ισούνται)
1,5μον. (Αιτιολογίες για τα αντίστοιχα ίσα στοιχεία)

0,5μον. (Αναφορά στο κριτήριο που χρησιμοποιήθηκε για την ισότητα των τριγώνων)

0,5μον. (Αναφορά ότι οι πλευρές ΖΕ και ΗΘ ισούνται)

0,5μον. (Εύρεση των τριγώνων που συγκρίνονται)

1,5μον. (Εύρεση των αντίστοιχων κύριων στοιχείων των τριγώνων που ισούνται)
1,5μον. (Αιτιολογίες για τα αντίστοιχα ίσα στοιχεία)

0,5μον. (Αναφορά στο κριτήριο που χρησιμοποιήθηκε για την ισότητα των τριγώνων)

0,5μον. (Αναφορά ότι οι πλευρές ΕΘ και ΖΗ ισούνται)

1μον. (Αναφορά στο κριτήριο που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του ότι το ΕΖΗΘ είναι #)

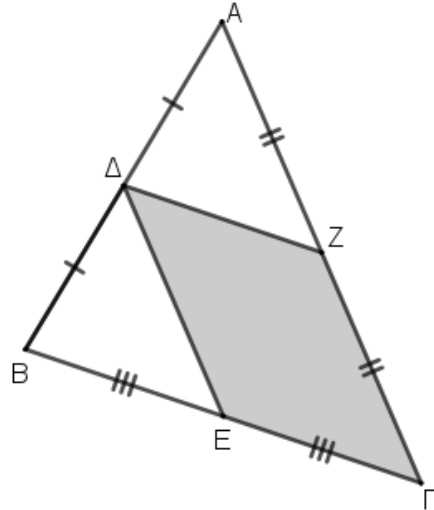
A6

Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

(β) Τα τρίγωνα ΔBE και $A\Delta Z$ είναι ίσα.

Λύση



(α)

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \text{ μέσο της } AB \\ Z \text{ μέσο της } A\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta Z \parallel = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta Z \parallel = E\Gamma$$

Το $\Delta E\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο διότι έχει ένα ζεύγος απέναντι πλευρών που είναι ίσες και παράλληλες.

(β)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔBE και $A\Delta Z$:

Α' Τρόπος

(1) $\Delta\Delta = \Delta B$ (Δ μέσο της AB)

(2) $\angle A\Delta\Gamma = \angle \Delta BE$ (εντός εκτός επί τα αυτά)

(3) $\Delta Z = BE$ ($\Delta Z \parallel = \frac{B\Gamma}{2}$ από (α))

$1,2,3 \Rightarrow \overset{\Delta}{\Delta BE} = \overset{\Delta}{A\Delta Z}$ (Π-Γ-Π)

(Π)

(Γ)

(Π)

Σημείωση: Αν γίνει μόνο ορθή κατασκευή σχήματος να δοθούν 2 μονάδες.

(α)

1μον.(Αναφορά ότι τα σημεία Δ και Z είναι μέσα πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$)

2μον.(Εύρεση της σχέσης που συνδέει τα τμήματα ΔZ και $\frac{B\Gamma}{2}$)

1μον.(Εύρεση της σχέσης που συνδέει τα τμήματα ΔZ και $E\Gamma$)

1μον.(Αναφορά στο κριτήριο που χρησιμοποιήθηκε για να αποδείξει ότι το $\Delta E\Gamma Z$ είναι #)

(β)

3μον.(Εύρεση των αντίστοιχων κύριων στοιχείων των τριγώνων που ισούνται)

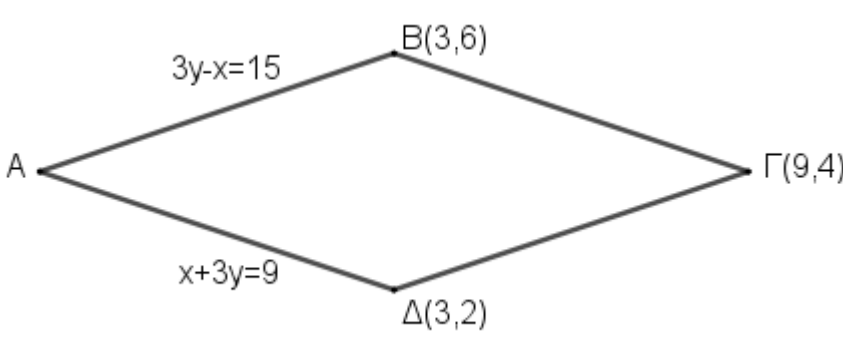
1,5μον.(Δικαιολογία για τα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων που ισούνται)

0,5μον.(Αναφορά στο κριτήριο που χρησιμοποιήθηκε για την ισότητα των τριγώνων)

	<u>Β' Τρόπος</u> (1) $AD = DB$ (Δ μέσο της AB) (Π) (2) $AZ = ZE$ ($\Delta EZZ\#$ με $DE = ZG$ και Z μέσο AG) (Π) (3) $DZ = BE$ ($DZ \parallel = \frac{BG}{2}$ από (α)) (Π) $1,2,3 \Rightarrow \triangle BE = \triangle AZ$ (Π-Π-Π)	3μον.(Εύρεση των αντίστοιχων κύριων στοιχείων των τριγώνων που ισούνται) 1,5μον.(Δικαιολογία για τα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων που ισούνται) 0,5μον.(Αναφορά στο κριτήριο που χρησιμοποιήθηκε για την ισότητα των τριγώνων)
--	---	---

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.

Η άσκηση B1 βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες και οι ασκήσεις B2 και B3 με δεκαπέντε (15) μονάδες η κάθε μία.

B1	Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $B(3,6)$, $\Gamma(9,4)$ και $\Delta(3,2)$. Οι εξισώσεις των πλευρών AB και AD είναι $3y - x = 15$ και $x + 3y = 9$ αντίστοιχα. (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A. (β) Αν $A(-3,4)$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.  Λύση (α) $\begin{array}{rcl} 3y - x & = & 15 \\ 3y + x & = & 9 \end{array} +$ $6y = 24 \Rightarrow y = 4$ $\Rightarrow 3 \cdot 4 + x = 9$ $\Rightarrow x = 9 - 12 \Rightarrow x = -3$ Συντεταγμένες του σημείου A: $A(-3,4)$	1μον.(Σχηματισμός του συστήματος των δύο εξισώσεων) 1μον.(Άθροισμα των δύο εξισώσεων) 1μον.(Εύρεση της τιμής του y) 1μον.(Αντικατάσταση της τιμής του y σε μια από τις δύο εξισώσεις) 1μον.(Εύρεση της τιμής του x)
------------------	--	--

	(β) $(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ $= \sqrt{(-3 - 3)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$ $(BG) = \sqrt{(3 - 9)^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2} = \sqrt{40}$ $(ΓΔ) = \sqrt{(9 - 3)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(6)^2 + (2)^2} = \sqrt{40}$ $(ΔA) = \sqrt{(3 - (-3))^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{(6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$ $AB = BG = ΓΔ = ΔA = \sqrt{40} \Rightarrow ABΓΔ \text{ Ρόμβος}$ ή Το $ABΓΔ$ είναι ρόμβος διότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες.	4μον.(Υπολογισμός του μήκους των πλευρών του # (1μον. για κάθε ορθό μήκος)) 1μον.(Αναφορά στο κριτήριο ρόμβου που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή του συμπεράσματος)
B2	Δίνονται οι παραστάσεις: $\kappa_1 = \frac{\frac{12}{\alpha} - 3\alpha}{\frac{2}{\alpha} + 1}$ $\kappa_2 = \left(\frac{3}{\alpha^2 - 4} + \frac{1}{\alpha + 2} \right) \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha}{3\alpha^2 - 3}$ (α) Να δείξετε ότι: $\kappa_1 = 3(2 - \alpha) \text{ και } \kappa_2 = \frac{\alpha}{3(\alpha - 2)}$ (β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1: \alpha y - \kappa_1 x = 3$ και $\varepsilon_2: y = \kappa_2 x - 5$ τέμνονται κάθετα, όπου τα κ_1 και κ_2 ορίζονται από τις πιο πάνω παραστάσεις. Λύση (α) $\kappa_1 = \frac{\frac{12}{\alpha} - 3\alpha}{\frac{2}{\alpha} + 1} = \frac{\frac{12 - 3\alpha^2}{\alpha}}{\frac{2 + \alpha}{\alpha}} = \frac{3(4 - \alpha^2)}{2 + \alpha}$ $= \frac{3(2 - \alpha)(2 + \alpha)}{2 + \alpha} = 3(2 - \alpha)$	(11, 4 μον.) (α) 3μον.(1μον. ομώνυμα σε αριθμητή και παρονομαστή, 1μον. διαγραφή του α, 1μον. παραγοντοποίηση με το 3) 2μον.(1,5μον. διαφορά τετραγώνων, 0,5μον. απλοποίηση-τελικό αποτέλεσμα)

$$\begin{aligned}
 \kappa_2 &= \left(\frac{3}{\alpha^2 - 4} + \frac{1}{\alpha + 2} \right) \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha}{3\alpha^2 - 3} \\
 &= \left[\frac{3}{(\alpha - 2)(\alpha + 2)} + \frac{1}{\alpha + 2} \right] \cdot \frac{\alpha(\alpha^2 + \alpha - 2)}{3(\alpha^2 - 1)} \\
 &= \left[\frac{3 + (\alpha - 2)}{(\alpha - 2)(\alpha + 2)} \right] \cdot \frac{\alpha(\alpha + 2)(\alpha - 1)}{3(\alpha - 1)(\alpha + 1)} \\
 &= \frac{\alpha + 1}{(\alpha - 2)(\alpha + 2)} \cdot \frac{\alpha(\alpha + 2)(\alpha - 1)}{3(\alpha - 1)(\alpha + 1)} \\
 &= \frac{\alpha}{3(\alpha - 2)}
 \end{aligned}$$

(β)

Η κλίση της ευθείας ε_1 : $\lambda_1 = \frac{\kappa_1}{\alpha}$

Η κλίση της ευθείας ε_2 : $\lambda_2 = \kappa_2$.

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \cdot \lambda_2 &= \frac{\kappa_1}{\alpha} \cdot \kappa_2 \\
 &= \frac{3(2 - \alpha)}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{3(\alpha - 2)} \\
 &= -1 \Rightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2
 \end{aligned}$$

2μον.(1μον. διαφορά τετραγώνων στον παρονομαστή, 1μον. παραγοντοποιήσεις στο δεύτερο κλάσμα)

3μον.(1μον.ομώνυμα στο πρώτο κλάσμα, 1μον. ανάλυση τριωνύμου, 1μον. διαφορά τετραγώνων)

1μον.(απλοποιήσεις-τελικό αποτέλεσμα)

(β)

1μον.(Ορθός υπολογισμός των κλίσεων των δύο ευθειών)

1μον.(Ορθή αντικατάσταση των κλίσεων στο γινόμενο $\lambda_1 \lambda_2$)

1μον.(Ορθή αντικατάσταση των κ_1 και κ_2)

1μον.Συνθήκη καθετότητας δύο ευθειών)

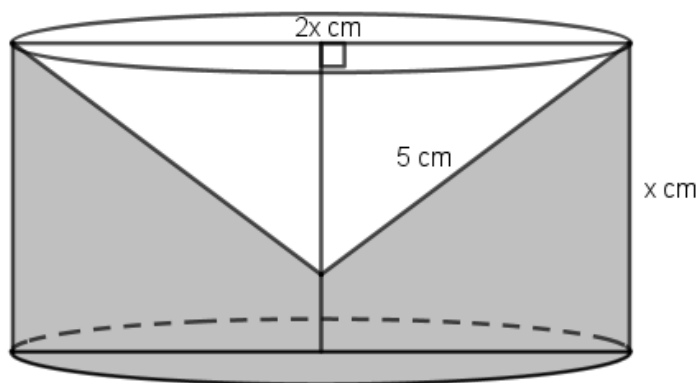
B3 Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται ένας κύλινδρος μέσα από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ένας κώνος. Η διάμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι διπλάσια από το ύψος του. Αν η γενέτειρα λ του κώνου έχει μήκος 5 cm :

(α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που προκύπτει είναι ίσο με:

$$E_{ολ} = x(3x + 5)\pi\text{ cm}^2$$

(β) Αν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού ισούται με $68\pi\text{ cm}^2$, να βρείτε την τιμή του x .

(γ) Αν $x = 4$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.



Λύση

(α)

$$E_{\text{στερεού}} = E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} + E_{\text{κυρτής κώνου}} + E_{\text{βάσης κυλίνδρου}}$$

$$E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} = 2\pi Rv = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot x = 2\pi x^2$$

$$E_{\text{κυρτής κώνου}} = \pi R\lambda = \pi \cdot x \cdot 5 = 5\pi x$$

$$E_{\text{βάσης κυλίνδρου}} = \pi R^2 = \pi x^2$$

$$\begin{aligned} E_{\text{στερεού}} &= 2\pi x^2 + 5\pi x + \pi x^2 = 3\pi x^2 + 5\pi x \\ &= x(3x + 5)\pi\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(α)

1μον.(Εκφραση της επιφάνειας του στερεού συναρτήσει των εμβαδών $E_{\text{κ.κυλ.}}$, $E_{\text{κ.κών.}}$ και $E_{\text{β.κυλ.}}$)

1μον.(Υπολογισμός της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου συναρτήσει του x (0,5μ.αν γράψει μόνο τον τύπο)).

1μον.(Υπολογισμός της κυρτής επιφάνειας του κώνου συναρτήσει του x (0,5μ.αν γράψει μόνο τον τύπο)).

1μον.(Υπολογισμός του εμβαδού βάσης του κυλίνδρου συναρτήσει του x (0,5μ.αν γράψει μόνο τον τύπο)).

1μον.(Υπολογισμός της ολικής επιφάνειας του στερεού).

	(β) $x(3x + 5)\pi = 68\pi$ $x(3x + 5) = 68 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x = 68 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 68 = 0$ $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ $= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3(-68)}}{2 \cdot 3}$ $= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 816}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{841}}{6} = \frac{-5 \pm 29}{6}$ $x_1 = \frac{-5 + 29}{6} = \frac{24}{6} = 4 \quad \text{Δεκτή}$ $x_2 = \frac{-5 - 29}{6} = -\frac{34}{6} = -\frac{17}{3} \quad \text{Απορρίπτεται}$ (γ) $R = x = 4 \text{ cm}$ $\lambda^2 = R^2 + v^2 \Leftrightarrow 25 = 16 + v^2 \Leftrightarrow v^2 = 9 \Leftrightarrow v = 3$ ή $v = 3 \text{ (Πυθαγόρεια Τριάδα)}$ $V_{\text{στερεού}} = V_{\text{κυλίνδρου}} - V_{\text{κώνου}}$ $V_{\text{κυλίνδρου}} = \pi R^2 v_{\text{κυλ.}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = \pi \cdot 16 \cdot 4 = 64\pi \text{ cm}^3$ $V_{\text{κώνου}} = \frac{\pi R^2 v_{\text{κων.}}}{3} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 3}{3} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 3}{3} = 16\pi \text{ cm}^3$ $V_{\text{στερεού}} = 64\pi - 16\pi = 48\pi \text{ cm}^3$	0,5μον.(Αναγραφή της εξίσωσης) 1μον.(Σχηματισμός της εξίσωσης στην μορφή $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$) 1μον.(Ορθή αναγραφή του τύπου) 0,5μον.(Ορθή αντικατάσταση) 0,5μον.(Πράξεις) 1μον.(Εύρεση των δύο λύσεων) 0,5μον.(Απόρριψη της μιας λύσης της εξίσωσης) (γ) 0,5μον.(Υπολογισμός της ακτίνας) 1μον.(Υπολογισμός του ύψους του κώνου) 1μον.(Έκφραση του όγκου του στερεού συναρτήσει των όγκων του κυλίνδρου και του κώνου) 1μον.(Υπολογισμός του όγκου του κυλίνδρου) 1μον.(Υπολογισμός του όγκου του κώνου) 0,5μον.(Αποτέλεσμα)
--	--	---