

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 6 ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες.

Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

A1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(-2) + (-3) =$

(β) $(-15) \div (-5) =$

(γ) $(+7) \cdot (-3) \cdot (-1) =$

(δ) $|+4| + |3 - 7| =$

(ε) $-8^0 + (-3)^2 =$

Λύση

(α) $(-2) + (-3) = -5$

(β) $(-15) \div (-5) = +3$

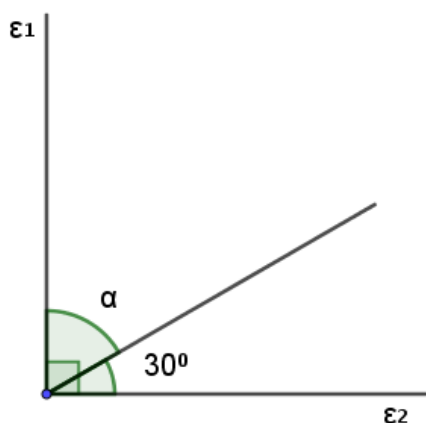
(γ) $(+7) \cdot (-3) \cdot (-1) = +21$

(δ) $|+4| + |3 - 7| = |+4| + |-4| = 4 + 4 = +8$

(ε) $-8^0 + (-3)^2 = -1 + 9 = +8$

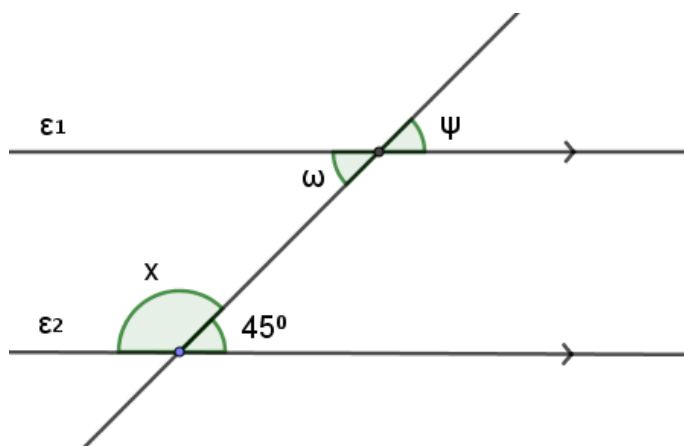
A2. (α) Να υπολογίσετε τη γωνία α αν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(μον.4)



(β) Να υπολογίσετε τις γωνίες x , ψ και ω , όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα, αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(μον.6)



Λύση

(α) $\hat{\alpha} + 30^\circ = 90^\circ$ (συμπληρωματικές γωνίες) $\Rightarrow \hat{\alpha} = 90^\circ - 30^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} = 60^\circ$

(β) $\hat{\omega} = 45^\circ$ (εντός εναλλάξ γωνίες)

$\hat{\psi} = 45^\circ$ (εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ή κατακορυφήν με την $\hat{\omega}$)

$\hat{x} + 45^\circ = 180^\circ$

(παραπληρωματικές γωνίες ή ευθεία γωνία ή εντός και επί τα αυτά με την $\hat{\omega}$)
 $\Rightarrow \hat{x} = 180^\circ - 45^\circ \Rightarrow \hat{x} = 135^\circ$

A3. Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση σε κάθε ένα από τα επόμενα ερωτήματα.

(α) Ο αντίστροφος αριθμός του -5 είναι:

- A. $+5$ B. $\frac{1}{5}$ Γ. $-\frac{1}{5}$ Δ. $\frac{5}{2}$

(β) Το ζευγάρι των αριθμών που περιέχει έναν φυσικό και έναν αρνητικό ακέραιο είναι:

- A. $\{8, -3\}$ B. $\{-\frac{1}{4}, 9\}$ Γ. $\{-2, \frac{2}{3}\}$ Δ. $\{-\frac{1}{2}, 0\}$

(γ) Ο αριθμός με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή είναι:

- A. -30 B. $\frac{20}{3}$ Γ. $-10\frac{2}{3}$ Δ. 20

(δ) Αν $x = 6$ και $\psi = 7$, τότε ο αριθμός $\frac{x}{\psi}$ είναι:

- A. φυσικός B. ρητός Γ. ακέραιος Δ. μικρότερος του μηδέν

(ε) Η λύση της εξίσωσης $2x + 8 = 3x - 5$ είναι:

- A. $x = 3$ B. $x = -3$ Γ. $x = -13$ Δ. $x = 13$

Λύση

(α) Γ (β) Α (γ) Α (δ) Β (ε) Δ

A4. Δίνονται οι επόμενοι οκτώ αριθμοί:

70 , 801 , 1002 , 303 , 255 , 1075 , 131 , 3316

(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί:
(σε κάθε γραμμή επιλέξετε έναν από τους αριθμούς που δίνονται)

1) Ο αριθμός που διαιρείται με το 9 είναι:	
2) Ο αριθμός που διαιρείται με το 3 και το 5 είναι:	
3) Ο αριθμός που διαιρείται με το 25 είναι:	
4) Ο αριθμός που διαιρείται με το 4 είναι:	
5) Ο αριθμός που διαιρείται με το 2 και το 5 είναι:	
6) Ο αριθμός που διαιρείται με το 2 και το 3 είναι:	

(μον.9)

(β) Ένας από τους οκτώ αριθμούς που δίνονται πιο πάνω είναι πρώτος. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

(μον.1)

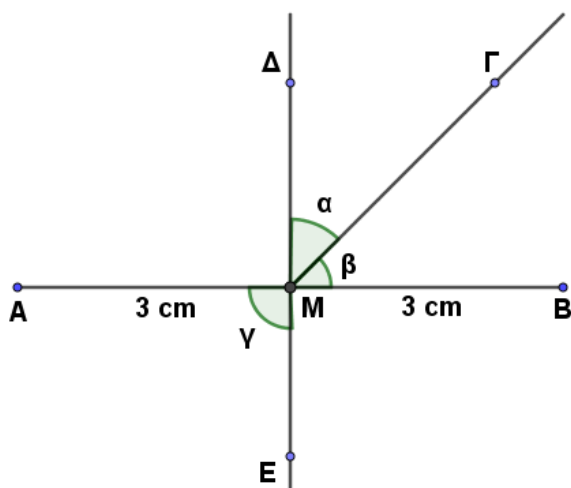
Λύση

(α)

1) 801 2) 255 3) 1075 4) 3316 5) 70 6) 1002

(β) 131

A5. Στο πιο κάτω σχήμα η ΔΕ είναι ευθεία, το ΑΒ είναι ευθύγραμμο τμήμα, και η ΜΓ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΒΜΔ. Οι γωνίες α και β είναι συμπληρωματικές και $AM = MB = 3 \text{ cm}$.



(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες α , β και γ . Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(μον.4,5)

(β) Στο πιο πάνω σχήμα, να βρείτε και να ονομάσετε:

- 1) Μία αμβλεία γωνία: (μον.1)
- 2) Μία οξεία γωνία: (μον.1)
- 3) Μία ορθή γωνία: (μον.1)
- 4) Ένα ζευγάρι εφεξής γωνιών: (μον.1)

(γ) Μελετώντας το πιο πάνω σχήμα ο Γιώργος ισχυρίζεται ότι η ευθεία ΔΕ είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μον.1,5)

Λύση

(α) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$ (συμπληρωματικές γωνίες)

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} \text{ (ΜΓ διχοτόμος της } \widehat{\Delta\hat{M}B})$$

$$\text{Άρα } 2\hat{\alpha} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\text{Επομένως } \hat{\alpha} = \hat{\beta} = 45^\circ$$

$$\hat{\gamma} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ \text{ (κατακορυφήν γωνίες)}$$

(β)

- 1) $\widehat{E\hat{M}\Gamma}$ (ή $\widehat{A\hat{M}\Gamma}$)
- 2) $\widehat{B\hat{M}\Gamma}$ (ή $\widehat{\Gamma\hat{M}\Delta}$ ή $\hat{\alpha}$ ή $\hat{\beta}$)
- 3) $\widehat{\Delta\hat{M}B}$ (ή $\widehat{B\hat{M}E}$ ή $\widehat{E\hat{M}A}$ ή $\widehat{A\hat{M}\Delta}$ ή $\hat{\gamma}$)
- 4) $\{\widehat{A\hat{M}\Delta}, \widehat{\Delta\hat{M}\Gamma}\}$ ή οποιοδήποτε άλλο ζεύγος

(γ) Ναι, συμφωνώ με τον ισχυρισμό του Γιώργου.

Η ευθεία ΔΕ είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και περνά από το μέσο του, επομένως είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

(Το Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ αφού $AM = MB = 3 \text{ cm}$ και η ΔΕ είναι κάθετη στο ΑΒ αφού $\widehat{DMB} = 90^\circ$).

.

A6. (α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(-2 + 4) \cdot 3^2 + (3 - 7)^2 \div (-1)}{-2\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \frac{2}{5}}$$

(μον.7)

(β) Αν $A = -1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

(μον.3)

$$A^1 + A^2 + A^3 + \dots + A^{2024}$$

Λύση

(α)

$$A = \frac{2 \cdot 9 + (-4)^2 \div (-1)}{-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{18 + 16 \div (-1)}{-\frac{4}{2}}$$

$$= \frac{18 - 16}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

(β)

$$\begin{aligned} & A^1 + A^2 + A^3 + \dots + A^{2024} \\ &= (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{2024} \\ &= (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 = 0 \end{aligned}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 3 ασκήσεις και βαθμολογείται με 40 μονάδες.

Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Δύο ασκήσεις βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία και μία άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις:

1) $-5\omega + 10 + 3\omega = 14 - 4\omega$

(μον.3)

2) $2(\psi + 2) = 3\psi + 6$

(μον.3)

3) $\frac{x}{3} - \frac{3x-1}{2} = 2$

(μον.4)

(β) Αν $\omega = 2$ και $\psi = -2$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων A και B και να τις συγκρίνετε χρησιμοποιώντας ένα από τα σύμβολα $<, =, >$.

(μον.5)

1) $A = -\psi^\omega$

2) $B = \omega^{-\psi}$

Λύση

(α)

1) $-5\omega + 10 + 3\omega = 14 - 4\omega$

$$\Rightarrow -5\omega + 3\omega + 4\omega = 14 - 10$$

$$\Rightarrow 2\omega = 4$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{4}{2} = 2$$

2) $2(\psi + 2) = 3\psi + 6 \Leftrightarrow 2\psi + 4 = 3\psi + 6$

$$\Rightarrow 2\psi - 3\psi = 6 - 4$$

$$\Rightarrow -\psi = 2$$

$$\Rightarrow \psi = -2$$

3) $\frac{x}{3} - \frac{3x-1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2x - 3(3x - 1) = 2 \cdot 6$

$$\Rightarrow 2x - 9x + 3 = 12 \Leftrightarrow 2x - 9x = 12 - 3$$

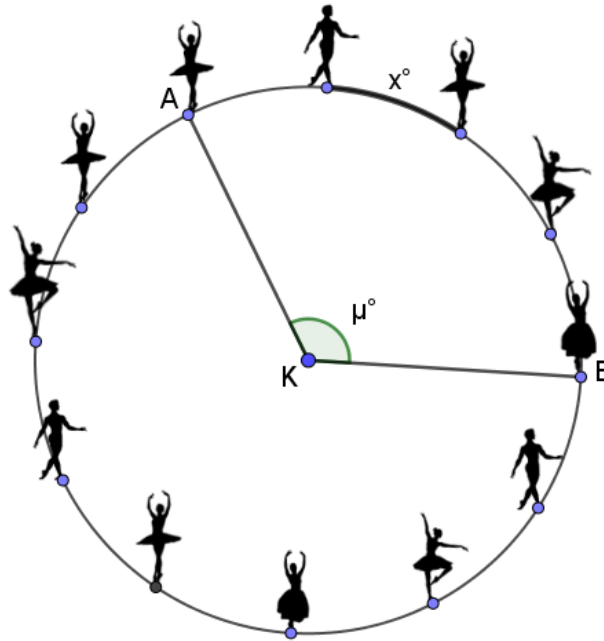
$$\Rightarrow -7x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{-7} \Rightarrow x = -\frac{9}{7}$$

(β) $A = -\psi^\omega = -(-2)^2 = -(+4) = -4$

$$B = \omega^{-\psi} = 2^{-(-2)} = 2^2 = 4$$

Άρα $A < B$

B2. (α) Σε μία παράσταση μπαλέτου 12 χορευτές/τριες τοποθετούνται σε σχήμα κύκλου, με κέντρο ένα σταθερό σημείο K , ακτίνα 2 μέτρα (m) και σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



- 1) Πόσα μέτρα (m) είναι η απόσταση του κάθε χορευτή/τριας από το σημείο K ;

(μον.1)

- 2) Τα τόξο που σχηματίζεται ανάμεσα σε 2 οποιουσδήποτε διαδοχικούς χορευτές/τριες έχει μέτρο x μοίρες. Να υπολογίσετε την τιμή του x , με χρήση εξίσωσης.

(μον.3)

- 3) Οι χορευτές/τριες από τη θέση A μέχρι και τη θέση B φαίνονται από το κέντρο του κύκλου K υπό γωνία μ μοιρών, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το μέτρο της επίκεντρης γωνίας μ , δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(μον.2)

- (β) Μια άλλη ομάδα χορού αποτελείται από 24 μπαλαρίνες, 18 άντρες χορευτές και 12 μαθητευόμενους χορευτές. Για τις ανάγκες ενός χορού θα χωριστούν σε ομάδες με το ίδιο πλήθος από μπαλαρίνες, το ίδιο πλήθος από άντρες χορευτές και το ίδιο πλήθος από μαθητευόμενους χορευτές. Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ομάδες μπορούν να σχηματίσουν, αν θα χορέψουν όλοι;

(μον.4)

Λύση

(α)

- 1) Η απόσταση των χορευτών από το σημείο K είναι ίση με $2m$.

Οι χορευτές/τριες βρίσκονται πάνω στον κύκλο άρα η απόστασή τους από το κέντρο του κύκλου K είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

- 2) $12x = 360^\circ$ (πλήρης γωνία – κύκλος) $\Rightarrow x = \frac{360^\circ}{12} \Rightarrow x = 30^\circ$

3) $\hat{\mu} = 4 \cdot x = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$

(η επίκεντρη γωνία είναι ίση με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου)

(β)

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \square \end{array}$$

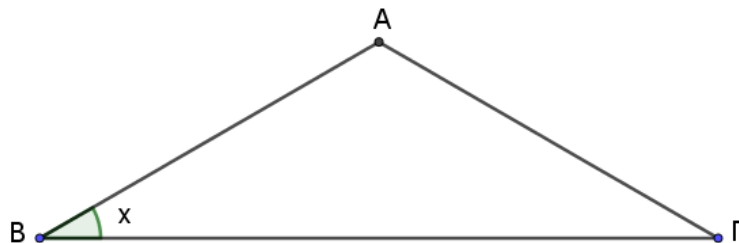
$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \square \end{array}$$

$$24 = 2^3 \cdot 3 \quad 18 = 2 \cdot 3^2 \quad 12 = 2^2 \cdot 3$$

$$M.K.A. [24,18,12] = 2 \cdot 3 = 6$$

Επομένως μπορούν να σχηματίσουν 6 ομοιόμορφες ομάδες.

- B3.** Στο τρίγωνο ABΓ η γωνία B είναι x μοίρες, η γωνία A είναι τετραπλάσια της γωνίας B και η γωνία Γ είναι κατά 30 μοίρες μικρότερη από το διπλάσιο της γωνίας B.



(α) Να υπολογίσετε την τιμή του x , με χρήση εξίσωσης.

(μον.6)

(β) Αν $x = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ του τριγώνου ABΓ και να χαρακτηρίσετε το είδος του,

(μον.4)

1) ως προς τις γωνίες του

2) ως προς τις πλευρές του

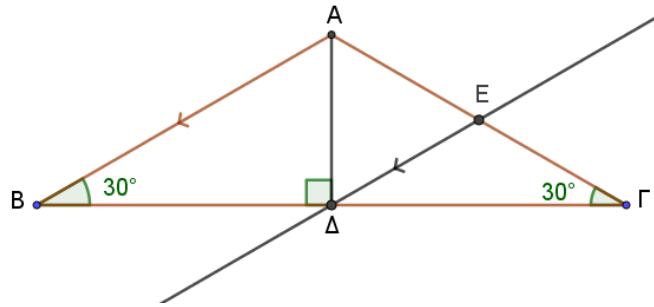
(γ) Στο τρίγωνο ABΓ, το AD είναι ύψος του τριγώνου και η ευθεία ED είναι παράλληλη με την πλευρά AB, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

1) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE.

(μον.4)

2) Να χαρακτηρίσετε το είδος του τριγώνου ADE ως προς τις πλευρές του.

(μον.1)



Λύση

(α) $\hat{B} = x$

$$\hat{A} = 4x$$

$$\hat{\Gamma} = 2x - 30^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ (Άθροισμα γωνιών τριγώνου)}$$

$$\Rightarrow x + 4x + 2x - 30^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 7x - 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow 7x = 180^\circ + 30^\circ$$

$$\Rightarrow 7x = 210^\circ \Rightarrow x = \frac{210^\circ}{7} \Rightarrow x = 30^\circ$$

(β) $\hat{A} = 4x = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$

$$\hat{\Gamma} = 2x - 30^\circ = 2 \cdot 30^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

Επομένως το τρίγωνο ABΓ είναι:

1) αμβλυγώνιο

2) ισοσκελές

(γ)

1^{ος} τρόπος

Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές άρα το ύψος AD είναι και διχοτόμος του τριγώνου.

Έτσι,

$$\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{D}\hat{A}\hat{E} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{D}\hat{A}\hat{E} = 60^\circ \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)}$$

$$\hat{A}\hat{E}\hat{D} + \hat{D}\hat{A}\hat{E} + \hat{A}\hat{D}\hat{E} = 180^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)}$$

$$\Rightarrow \hat{A}\hat{E}\hat{D} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

Επομένως $\hat{A}\hat{E}\hat{D} = \hat{D}\hat{A}\hat{E} = \hat{A}\hat{D}\hat{E} = 60^\circ$ και έτσι το τρίγωνο ADE είναι ισόπλευρο.

2^{ος} τρόπος

$$E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Delta = 30^\circ \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες)}$$

$$\Rightarrow A\hat{\Delta}E = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \text{ (ΑΔ ύψος)}$$

$$A\hat{E}\Delta + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow A\hat{E}\Delta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

(εντός και επί τα αυτά γωνίες)

$$\text{ή } A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

(εξωτερική γωνία τριγώνου ΔΕΓ)

$$A\hat{E}\Delta + \Delta\hat{A}E + A\hat{\Delta}E = 180^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)}$$

$$\Rightarrow \Delta\hat{A}E = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

Επομένως $A\hat{E}\Delta = \Delta\hat{A}E = A\hat{\Delta}E = 60^\circ$ και έτσι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.